

A 3D graphic showing a coordinate system with two intersecting axes. A curve starts at the origin and rises steeply, then levels off. Several small, metallic-looking spheres are placed along the curve, representing data points. The text 'Empirijski modeli' is displayed in a bold, black font on a light pink rectangular background to the right of the curve.

# Empirijski modeli

# Podaci

- dobiveni mjerenjem ( $x_i, y_i$ )
- grube pogreške se odbacuju
- sugeriraju model (na osnovu grafičkog prikaza pretpostavljamo oblik ovisnosti)
- služe za procjenu parametara
- testiraju model
- cilj: utvrditi analitički izraz koji povezuje podatke, odnosno model za analitičke i prediktivne svrhe

# Definicija

- **Empirijski se model** zasniva samo na podacima i koristi se za predviđanje ponašanja sustava
- model se sastoji od funkcije koja se prilagođava podacima (engleski 'fit' )
- graf funkcije samo približno prolazi kroz točke
- **nužni podaci**

# Konstrukcija modela

- ucrtamo li parove izmjerenih veličina  $(x_i, y_i)$  i dobijemo približno točke na pravcu, postoji linearna ovisnost oblika  $y=ax+b$  ili  $y=ax$
- metodom najmanjih kvadrata (minimiziranje sume kvadrata pogreške) dobivamo parametre  $a$  i  $b$
- možemo predvidjeti  $y$  vrijednosti tamo gdje nema mjerenja
- funkciju je važno ne primjenjivati izvan dosega modela

# Zapis podataka

- srednja vrijednost veličina  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \text{AVERAGE}(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

- rezultate veličina zapisujemo u obliku

$$x = \bar{x} \pm \sigma_x$$

gdje je  $\sigma_x$  standardan devijacija aritmetičke sredine.

- primjer: [http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e|search\\_for=elecsmag\\_in!](http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?e|search_for=elecsmag_in!)

# Linearna regresija :: $y=ax+b$

- metodom najmanjih kvadrata dobivamo parametre  $a$ ,  $b$  te pripadna odstupanja

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \frac{\overline{y^2} - \bar{y}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} - a^2 \right)}$$

$$\sigma_b = \sigma_a \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$$

# Linearna regresija :: $y=ax$

- metodom najmanjih kvadrata dobivamo parametar  $a$  te njegovu standardnu devijaciju

$$a = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}}$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{1}{n} \left( \frac{\overline{y^2}}{\overline{x^2}} - a^2 \right)}$$

# Modeli koji se svode na $y=ax+b$

- logaritmiranjem potencije možemo svesti na linearnu funkciju

$$p = k \cdot s^a$$

$$\ln(p) = \ln(k) + a \cdot \ln(s)$$

- supstitucijom dobivamo linearni oblik  $y=ax+b$

$$x = \ln(s)$$

$$a = a$$

$$y = \ln(p)$$

$$b = \ln(k)$$

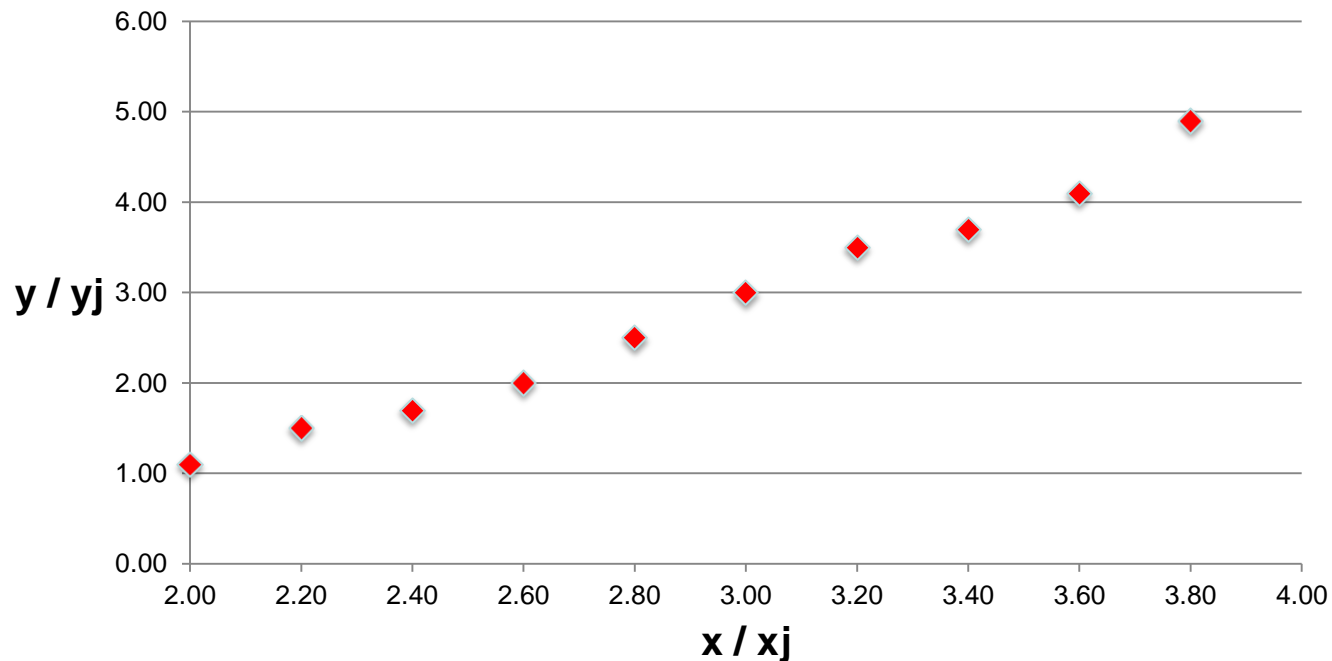


# Pr: Provjera ovisnosti $y=ax+b$

- primjer izmjerenih podataka

$x/x_j$	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
$y/y_j$	1.1	1.5	1.7	2.0	2.5	3.0	3.5	3.7	4.1	4.9

- grafički prikaz (provjera linearnosti)



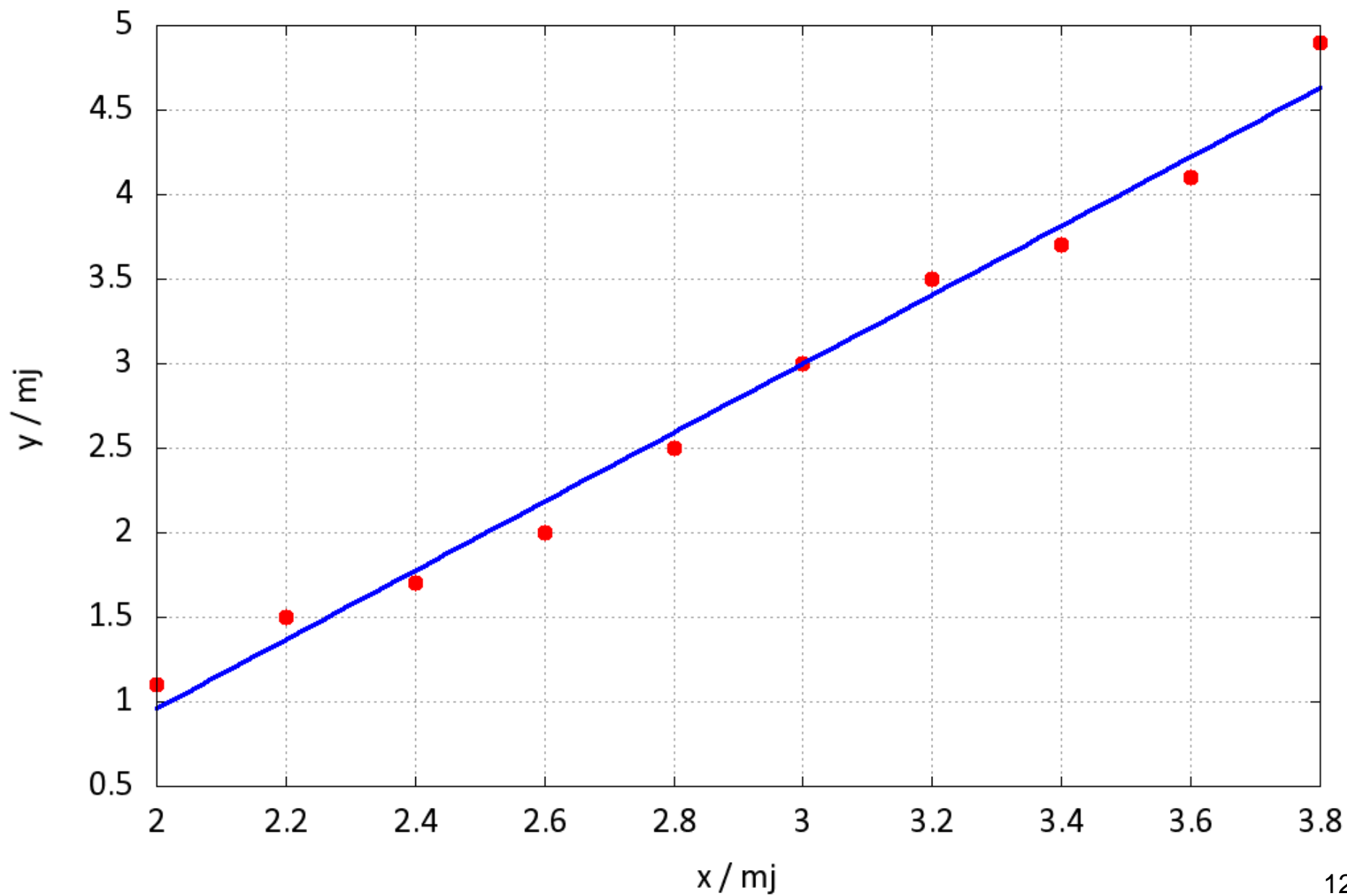
# Pr: Računanje parametara a i b

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	$x_i$	$y_i$	$x_i y_i$	formule u D	$x_i^2$	formule u F	$y_i^2$	formule u H	
2	1	2,0	1,1	2,2	=B2*C2	4,0	=B2^2	1,2	=C2^2	
3	2	2,2	1,5	3,3	=B3*C3	4,8	=B3^2	2,3	=C3^2	
4	3	2,4	1,7	4,1	=B4*C4	5,8	=B4^2	2,9	=C4^2	
5	4	2,6	2,0	5,2	=B5*C5	6,8	=B5^2	4,0	=C5^2	
6	5	2,8	2,5	7,0	=B6*C6	7,8	=B6^2	6,3	=C6^2	
7	6	3,0	3,0	9,0	=B7*C7	9,0	=B7^2	9,0	=C7^2	
8	7	3,2	3,5	11,2	=B8*C8	10,2	=B8^2	12,3	=C8^2	
9	8	3,4	3,7	12,6	=B9*C9	11,6	=B9^2	13,7	=C9^2	
10	9	3,6	4,1	14,8	=B10*C10	13,0	=B10^2	16,8	=C10^2	
11	10	3,8	4,9	18,6	=B11*C11	14,4	=B11^2	24,0	=C11^2	
12										
13	Srednje vrijednosti gornjih podataka:									
14	n	x	y	xy		$x^2$		$y^2$		
15	10	2,90	2,80	8,79	=AVERAGE(D2:D11)	8,74	=AVERAGE(F2:F11)	9,24	=AVERAGE(H2:H11)	
16										
17			a=	2,04	= (D15-B15*C15)/(F15-B15^2)				$a = (2.04 \pm 0.08) y_j/x_j$	
18			$\sigma_a$ =	0,08	=SQRT(1/A15*((H15-C15^2)/(F15-B15^2)-D17*D17))					
19			b=	-3,12	=C15-D17*B15					
20			$\sigma_b$ =	0,04	=D18*SQRT(F14-B14^2)				$b = (-3.12 \pm 0.04) y_j$	
21										

# Grafički prikaz funkcije i podataka

- 1 linija = 1 naredba
- \ na kraju retka znači prelazak naredbe u novi red
- # znače da zanemari sve u toj liniji iza njih
- definicija funkcije:  $f(x) =$  (analitički slično kao u C-u, samo za potenciranje \*\*)
- naredba za crtanje (na kraju prije unset multiplot i reset):  
`plot imeFunkcije stil1, 'imeDatoteke' stil2, ...`
- stilovi  
`w l` (s linijama) `lc rgb "BOJA" lw ŠIRINA`  
`w p` (sa simbolima) `pt BROJ ps "BOJA" lw ŠIRINA`

Graf  $y = 2.04 x - 3.12$



# Gnuplot

- 1 linija = 1 naredba
- `\` na kraju retka znači prelazak naredbe u novi red
- `#` znače da zanemari sve u toj liniji iza njih
- ime datoteke za pohranu: `set output 'IME'`
- definicija funkcije: `f(x) =` (analitički slično kao u C-u, samo za potenciranje `**`)
- naredba za crtanje (na kraju prije `unset multiplot` i `reset`):  
`plot imeFunkcije stil1 ti 'NASLOV U LEGENDI', \`  
`'imeDatoteke' odabir stil2 ti 'NASLOV U LEGENDI', ...`
- odabir: `u brXstupca:brYstupca` (koristeći podatke u odgovarajućim stupcima za x i y)
- stilovi: `w l` (s linijama) `lw ŠIRINA lc rgb "BOJA"`  
`w p` (sa simbolima) `pt BROJ ps ŠIRINA lc rgb "BOJA"`

# 5.1 zadatak: linearna regresija

- skinite i raspakirajte priloženu zip arhivu
- preimenujte ZAD.c u (vaši inicijali bez kvačica)\_51.c
- kreirajte potreban projekt
- pokrenite dani kod
- otvorite gnuplot
  - upišite: `cd 'ADRESA DIREKTORIJA GDJE SU PODACI'`  
`plot 'xy.txt' u 1:2 w p pt 6`
  - ponašaju li se podaci kao  $y=a*x+b$
- uradite zadatke dane u C-kodu
- preimenujte ZAD.plt u (vaši inicijali bez kvačica)\_51.plt
- uradite zadatke dane u komentarima (#ZAD: )
- priložite c, plt, txt i png datoteke